Unione Matematica Italiana

Progetto Olimpiadi della Matematica

Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999, o comunque una successione di 4 cifre. Si ricorda anche che occorre sempre e comunque compilare tutte le 4 cifre, eventualmente aggiungendo degli zeri iniziali.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera. Si ricorda che la parte intera di un numero reale x è il più grande intero minore od uguale ad x.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:
$\sqrt{2} = 1,4142$ $\sqrt{3} = 1,7321$ $\sqrt{7} = 2,6458$ $\pi = 3,1416$.

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio**: termine ultimo per la scelta del problema Jolly (dopo verrà assegnato d'ufficio il primo problema della lista). La scelta deve essere effettuata consegnando l'apposito cartellino al tavolo della giuria.
- **30 minuti dall'inizio**: termine ultimo per fare domande sul testo. Le domande devono essere rivolte solo dai capitani al tavolo delle domande.
- **100 minuti dall'inizio**: termine dell'incremento dei punteggi dei problemi.
- **120 minuti dall'inizio**: termine della gara.

19 gennaio 2018

Gara a Squadre Femminile – Testi dei problemi[1]

1. *PREPARATIVI* Giuseppe Rosolini

Chef Bobo Dvornicciuolo Ma il titolo non era diverso?

Regista No, chef, è giusto: MASTERCHEF.

Chef Bobo Dvornicciuolo Ma allora perché dappertutto c'è scritto MASTERMHAT?

Produttore È sbagliato?

Regista (*Arrabbiato*) Sì!!! Hai sbagliato C, E e F. Hai messo al loro posto altre lettere dell'alfabeto italiano; l'unica cosa giusta è che le tre nuove lettere sono pure diverse tra loro.

Voce fuori campo In quanti modi si potevano sbagliare tutte e tre le lettere C, E e F scegliendo altre lettere dell'alfabeto italiano, tutte diverse tra loro?

2. *SCENE* Giuseppe Rosolini

Scenografo L'ingresso è a forma di stella con cinque punte e nove lati. È stato costruito sulla struttura di un esagono regolare; su cinque dei sei lati è stato appoggiato esternamente un triangolo equilatero con lati uguali a quelli dell'esagono. In questo modo otto lati della stella hanno la stessa lunghezza, il nono lato ha lunghezza tripla degli altri: è il lato su cui la struttura appoggia al terreno e i concorrenti entrano uno dopo l'altro tra getti di fuoco dalle cinque punte. L'area di ogni triangolo equilatero è $8\,\mathrm{m}^2$.

Regista Hai portato la H in fondo nel titolo del programma. Almeno sembra voler dire qualcosa?

Scenografo Sì.

Regista Ci guarderanno soltanto quelli che fanno le Olimpiadi della Matematica, come nel Ragazzo Invisibile. A proposito, qual è l'area totale della stella?

3. *ESCLUSI* Giuseppe Rosolini

Regista Le proposte per la partecipazione arrivate sono state 10000, ma molte sono state escluse, altre sono state escluse e poi recuperate. Alla fine erano 2018, è il numero che è venuto facendo la differenza che ho scritto qui:

$$10000 - 1 - 1 - 1 - 1 - \ldots - 1.$$

Produttore Ma quella differenza fa 0.

Regista Ah, già! Mi sono dimenticato di scrivere una coppia di parentesi.

Voce fuori campo Quanti 1 sono raccolti tra le due parentesi mancanti?

4. *PENNE ALLA NEPERO* Silvia Sconza

Jolanda Conosco la ricetta segreta delle penne alla Nepero.

Antonio Dimmela, ti prego. (*Altri concorrenti hanno sentito quello che si stanno dicendo.*)

Jolanda D'accordo! La dobbiamo conoscere tutti. Per spiegare la ricetta segreta a 4 persone contemporaneamente ci vuole 1 minuto. Facciamo il più in fretta possibile prima che inizino le selezioni.

Voce fuori campo Dopo quanti minuti come minimo tutti i 2018 concorrenti conosceranno la ricetta segreta?

5. *RELAX* Simone Traverso

Antonio Che cosa stai facendo?

Caterina Sto calcolando la fattorizzazione in numeri primi di 6837.

Antonio Qual è la somma dei fattori primi di 6837?

---

[1] In ogni problema, a fianco di ogni titolo, compare il nome dell'autore.

6. *GUANTI* ——— Giuseppe Rosolini

Chef Bobo Dvornicciuolo Ogni cuoco sa che la cucina deve essere sempre pulita e il suo abbigliamento deve dimostrare questo. In particolare, ciascuno di voi deve indossare un paio di guanti che siano dello stesso colore. Purtroppo il costumista ha messo in quel cassetto alla rinfusa 35 paia di guanti rossi, 28 paia di guanti blu e 49 paia di guanti verdi. Jolanda, vai per prima a scegliere i tuoi guanti.

Jolanda Chef, quanti guanti devo estrarre per essere certa di avere un paio di guanti dello stesso colore da poter indossare?

Chef Bobo Dvornicciuolo Questo lo sai tu!

7. *OLIO BOLLENTE 1* ——— Simone Muselli

Jolanda (*Sottovoce a Caterina*) Ogni numero da 1 a 2018 parla, in ordine dal numero minore, e dice: «Dei numeri che hanno parlato prima di me hanno detto la verità tutti e soli i miei divisori.» Quanti numeri dicono la verità? (*Caterina urla perché, distraendosi per ascoltare Jolanda, si è scottata con l'olio bollente.*)

8. *OLIO BOLLENTE 2* ——— Sandro Campigotto

Jolanda (*Sottovoce a Caterina*) Fissa un polinomio di primo grado, chiamalo $p(x)$. Sai che per un certo numero reale a accade che $p(a) = 34$, $p(p(a)) = 149$ e $p(p(p(a))) = 724$. Quanto vale a?

Caterina (*Prendendo un mestolo e immergendolo nell'olio bollente*) Vorrei saperlo anch'io! (*Cerca di colpire Jolanda con l'olio bollente.*)

9. *DADI DECORATI* ——— Simone Muselli

Chef Alessandra Krucnann Concorrenti! Un vero chef deve essere pronto a decorare i suoi piatti per soddisfare i propri commensali, ad esempio preparare la cena di gala per le EGMO. Perciò, Usando gli ingredienti che avete scelto in dispensa, dovete preparare un antipasto a forma di dado a sei facce, tutte completamente bianche. Poi dovete decorare ciascuna faccia, disegnando un numero compreso tra 0 e 999 in modo che ogni numero utilizzato abbia la somma delle sue cifre, anche se una soltanto, che compare su almeno una delle facce adiacienti.

Chef Federico Polero Chi farà in modo che i numeri usati per decorazione diano la somma massima possibile avrà un vantaggio nella prossima prova.

Voce fuori campo QUAL È LA SOMMA MASSIMA POSSIBILE DEI SEI NUMERI SULLE FACCE DI UN TALE DADO?

10. *IL DUELLO* ——— Sandro Campigotto

Chef Pino Bastardich Paolo e Luca, venite qui! Dovremo eliminare uno di voi. Vi giocherete la permanenza a MASTERMATH con un dado a sei facce. Luca sceglie un numero s a caso compreso tra 2 e 5, estremi inclusi. Vince il gioco se, lanciando il dado, ottiene il numero scelto s; perde se esce un numero a tale che $|s - a| = 1$. Se esce qualsiasi altro valore tira il dado di nuovo.

Voce fuori campo QUAL È LA PROBABILITÀ CHE LUCA HA DI VINCERE?

[*Dare come risposta la somma del numeratore e del denominatore della frazione, che è la probabilità, ridotta ai minimi termini.*]

11. *LIBRI DI RICETTE* ——— Francesco Raspaolo

Jolanda Ho letto due libri di ricette contemporaneamente. Il primo libro era di Chef Alessandra Krucnann: ho letto 6 pagine al giorno. Il secondo era di Chef Pino Bastardich; era più interessante, così di quello ho letto 19 pagine al giorno. Ma quando sono arrivato a metà del primo libro, mi sono appassionato e ho deciso di invertire il ritmo di lettura, passando quindi a leggere 19 pagine al giorno del primo e 6 al giorno del secondo.

Antonio Hai finito di leggere i due libri?

Jolanda Sì, li ho terminati entrambi oggi: ho letto le ultime 19 pagine del primo e le ultime 3 pagine del secondo.

Voce fuori campo QUANTE PAGINE HA COME MINIMO IL SECONDO LIBRO?

12. *PASSATEMPO 1* Francesco Raspaolo

Jolanda Facciamo qualche calcolo.

Antonio D'accordo: tiriamo due dadi a sei facce. Ciascuno di noi scrive su un foglio il prodotto dei due valori che risultano sulle facce superiori dopo il lancio. Allo scoccare di ogni minuto, tu dividi per 2 l'ultimo numero che hai scritto sul tuo foglio; io moltiplico per 3 l'ultimo numero che ho scritto sul mio foglio.

Jolanda Va bene. (*Dopo alcuni minuti, si interrompono ed eseguono la divisione del numero scritto da Antonio con il numero scritto da Jolanda: il risultato è maggiore di 2018.*)

Voce fuori campo QUANTE MOLTIPLICAZIONI HA FATTO COME MINIMO ANTONIO?

13. *TARTINE* Sandro Campigotto

Chef Bobo Dvornicciuolo Antonio, hai preparato un vassoio di tartine quadrate molto complesso. Fammi capire se sono riuscito a interpretare la sua costruzione. Hai iniziato con una tartina molto grande, poi hai preparato altre due tartine uguali e le hai posizionate in modo che avessero un vertice in comune tra loro e un altro vertice in comune con la tartina già appoggiata sul vassoio: il bello è che il triangolo vuoto tra le tre tartine è rettangolo! E l'hai riempito con salsa a base di guacamole.

Antonio Hai ragione, chef! Poi ho continuato così. Per ogni tartina più piccola appena appoggiata sul vassoio ho preparato due tartine che ho appoggiato come hai spiegato tu. Poi ho riempito il triangolo vuoto con una salsa, sempre diversa.

Chef Bobo Dvornicciuolo Creando un bell'effetto arcobaleno. La cosa incredibile è che ci sono tartine in dieci dimensioni diverse! La tartina più grande ha lato 10 cm?

Antonio Giusto, chef!

Voce fuori campo QUAL È L'AREA IN cm^2 OCCUPATA DALLE TARTINE APPOGGIATE SUL VASSOIO E DALLE SALSE?

14. *ACCENSIONE* Silvia Sconza

Chef Alessandra Krucnann Per accendere le cucine dovete trovare il codice. È un numero intero di quattro cifre, maggiore di 999, divisibile per 9, contenente almeno una cifra 0.

Caterina Ma, chef, quanti sono quei codici?

15. *PROVA IN ESTERNA* Sandro Campigotto

Chef Pino Bastardich La prova in esterna consiste nel preparare consegne a domicilio. Siamo a Tegoria di Sotto: 125 dei suoi abitanti possiedono una bicicletta, 150 dei suoi abitanti possiedono un motorino e 250 dei suoi abitanti possiedono un'automobile. Nessuno possiede tutti e tre i mezzi di trasporto. Vi sono anche 32 abitanti che non hanno alcun mezzo di trasporto. Quanti sono, come minimo, gli abitanti di Tegoria di Sotto?

Jolanda (*Rivolta a Caterina*) Ma che cosa c'entra questo con la prova in esterna?

16. *SOGNO* Francesco Raspaolo

Antonio (*Nella stanza della verità*) Mi sono convinto di venire a MASTERMATH, dopo aver fatto un sogno. C'era un'isola con 2019 pirati: i capitani Barbarossa e Barbanera e 2017 pirati divisi in due ciurme. Un pirata di Barbarossa diceva obbligatoriamente la verità; un pirata di Barbanera doveva dire il falso.

Arriva un mercantile. I due capitani pirata lanciano una sfida al comandante del mercantile: determinare il numero di pirati della ciurma di Barbarossa. Per fare questo Barbarossa e Barbanera fanno passare i loro 2017 uomini attraverso una porta, uno alla volta. Il primo pirata dice: «Sono un pirata di Barbarossa.» Il secondo pirata dice: «Non è vero, lui è un pirata di Barbanera.» L'n-esimo pirata dice: «Prima di me, sono usciti $\left[\frac{n}{3}\right]$ pirati di Barbanera.»

Voce fuori campo QUANTI PIRATI FANNO PARTE DELLA CIURMA DI BARBAROSSA?

(Il numero $[r]$ è la parte intera di r.)

17. *PASSATEMPO 2* ______ Mattia Fecit

Jolanda Facciamo un po' di geometria.

Antonio D'accordo: Sia ABC un triangolo equilatero e sia D il punto su AC tale che la lunghezza di AD è tre volte la lunghezza di DC. Sia E il punto su BC tale che DE sia perpendicolare a CB, sia F il punto su AB tale che EF sia perpendicolare a AB e sia G il punto su AC tale che FG sia perpendicolare a AC. Siano P l'intersezione di FG e DE e M il punto medio di BC. Sia O l'intersezione tra AM e BP.

Jolanda Voglio calcolare il rapporto tra AO e OM.

[*Dare come risposta 100 volte il valore del rapporto.*]

18. *SEI LANCI* ______ Matteo Bobbio

Caterina (*Nella stanza della verità*) Ho deciso di venire a MASTERMATH perché non sapevo come impegnare il mio tempo. Mi ero ridotta a disegnare un quadrato su un foglio, prendere un segnalino e piazzarlo su un vertice, che chiamavo A. Poi tiravo un dado a sei facce non truccato e, a seconda del risultato, spostavo il segnalino: se usciva 1 o 2, spostavo il segnalino in senso orario lungo un lato da un vertice all'altro; se usciva 3 o 4, lasciavo il segnalino dov'era; se usciva 5 o 6, spostavo il segnalino in senso antiorario lungo un lato da un vertice all'altro. Effettuavo sempre sei lanci. Ho fatto questo così tante volte che ho potuto determinare la probabilità che il segnalino fosse di nuovo nel vertice A alla fine del gioco.

Voce fuori campo QUAL È LA PROBABILITÀ CHE IL SEGNALINO SIA NEL VERTICE A ALLA FINE DEL GIOCO?

[*Dare come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*]

19. *PIZZE PAZZE* ______ Simone Muselli e Silvia Sconza

Jolanda (*Nella stanza della verità*) Prima di venire a MASTERMATH, facevo consegne a domicilio per una pizzeria. Una volta, partendo sul motorino, mi accorgo che sul cruscotto sono presenti tutte e dieci le cifre: l'orologio indica le 12:36; il tachimetro indica la velocità di 04 km/h; il contachilometri indica 7985 km. La velocità massima del motorino era 50 km/h e mi chiesi, come minimo, quanto tempo doveva passare, viaggiando come preferivo, perché sul cruscotto apparissero ancora tutte le dieci cifre contemporaneamente, ognuna in una posizione diversa da quella dove la stavo vedendo.

[*Dare come risposta la somma dei minuti trascorsi e dei chilometri percorsi.*]

20. *MISTERY BOX* ______ Alessandro Murchio

Chef Bobo Dvornicciuolo (*Parla piano con gli altri giudici*) Avete sentito che cosa dicono nella stanza della verità? Ci penso io! (*Rivolto ai concorrenti*) Nella Mistery Box ci sono n olive, verdi e nere; non sono più di 10000. Non vi dico quanto vale n, ma vi dico che, estraendo due olive contemporaneamente dalla scatola, la probabilità di estrarre due olive di colore diverso è esattamente $\frac{1}{2}$. Avrà un vantaggio nella prossima prova chi mi dice quanti valori diversi può assumere il numero n.

21. *TORTA STELLARE* ______ Andrea Damonte

Chef Alessandra Krucnann Antonio, questa torta è splendida! È una stella a otto punte. Come l'hai chiamata?

Antonio Star Wars, chef.

Chef Alessandra Krucnann Perché? Che senso ha un nome simile!?!

Antonio Perché è stata una lotta riuscire a darle la forma che ha, chef.

Chef Alessandra Krucnann Lo vedo. Le punte delle stelle sono i vertici di un ottagono regolare?

Antonio Sì, chef! E il lato dell'ottagono è uguale all'altezza della torta: 5 cm.

Chef Alessandra Krucnann Ma come hai fatto a determinare come tagliare le punte della stella?

Antonio Ho preparato una torta circolare, chef. Poi ho tagliato via otto spicchi circolari per ottenere un prisma con base un ottagono regolare. Quindi ho tracciato sulla superficie superiore i rettangoli massimi contenuti nell'ottagono. A quel punto le otto punte della stella regolare erano segnate sulla superficie superiore ed è stato facile terminare la torta.

Chef Alessandra Krucnann È chiaramente un concentrato di calorie, ma che volume ha in cm^3?

22. *PIASTRELLE IN CUCINA* ______ Lorenzo Pollani

Regista Su quella parete voglio 25 piastrelle quadrate organizzate in una griglia quadrata 5×5 su cinque righe e cinque colonne. Dovete usare piastrelle a tinta unita di tre tipi: di colore rosso, di colore blu e di colore grigio. Per evitare altri errori, voglio essere assolutamente chiaro: (*il produttore alza le sopracciglia.*) dirò che due piastrelle sono *adiacenti* quando hanno almeno un vertice in comune. La parete deve essere piastrellata rispettando assolutamente le seguenti condizioni:

1. una piastrella di colore rosso non può essere adiacente ad una dello stesso colore;
2. una piastrella di colore grigio non può essere usata su una riga se sulla riga precedente (se esiste) c'è una piastrella di colore grigio;
3. una piastrella di colore blu non può essere usata su una colonna se sulla colonna successiva (se esiste) c'è una piastrella di colore blu.

Voce fuori campo In quanti modi è possibile piastrellare le 25 celle rispettando le regole?

23. *BISCOTTI* ______ Silvia Sconza

Chef Federico Polero Dovete preparare biscotti da distribuire in dieci scatole messe in fila, in ciascuna scatola potete mettere al massimo 100 biscotti. Dopo aver messo biscotti nella scatola più a sinistra, dovete mettere nelle altre scatole tanti biscotti come specificato da due regole:

1. se il numero di biscotti in una scatola è composto da più di una cifra, il numero di biscotti nella scatola a destra di quella deve essere la somma delle cifre;
2. se il numero di biscotti in una scatola è composto da una sola cifra c, il numero di biscotti nella scatola a destra di quella deve essere il numero ottenuto scrivendo la cifra c nel posto delle decine e la cifra 1 al posto delle unità.

Dovete fare in modo che i biscotti siano ottimi e che il loro numero totale sia massimo.

Voce fuori campo Quanti biscotti devono essere messi nella scatola più a sinistra?

24. ***LA PARETE DI FONDO*** ——— Damiano Poletti e Giuseppe Rosolini

Regista Interessante la parete di fondo nella scenografia della cucina: sembra senza limite con una piacevole piastrellatura ad alveare con piastrelle esagoni regolari uguali di colori rosso o grigio.

Scenografo Grazie! Ho pensato che un riferimento all'organizzazione gerarchica (delle api) fosse appropriato per le cucine dei grandi chef. Ho anche voluto dare un'idea di infinito e ho usato i colori del logo.

Regista (*Attratto dallo schema della decorazione*) Ogni piastrella rossa ha esattamente un lato in comune con una piastrella grigia. E due piastrelle grigie non hanno mai lati in comune. In effetti, due piastrelle grigie possono solo essere gli estremi di una fila dove tutte le altre piastrelle sono rosse.

Scenografo Che cosa vuoi dire? Che cos'è una fila di piastrelle? Sono esagoni, non quadrati.

Regista Prendi due piastrelle e considera il segmento che congiunge i loro centri. Quando ogni lato che questo segmento incontra è perpendicolare al segmento stesso, la fila determinata dalle due piastrelle consiste di tutte quelle piastrelle che hanno almeno un lato che incontra il segmento.

Scenografo In un certo senso, una piastrella individua file lungo sei direzioni diverse?

Regista È corretto.

Scenografo Quando ho disegnato la scenografia non l'avevo pensata in questi termini. Forse finisce che il titolo MASTERMATH è appropriato...

Regista Forse... Forse finisce che gli ascolti crollano... (*Ritorna a contemplare la parete con le piastrelle a alveare.*) Ma qui c'è una piastrella rossa al posto di una piastrella grigia!

Scenografo Vado a dirne quattro ai carpentieri.

Regista No, fermo! In quel punto la zona rossa diventa così vivida che attrae lo sguardo! Trovo quella parete ipnotica! È perfetta, lasciala così proprio perché rompe lo schema.

Voce fuori campo QUANTO È LUNGA AL MASSIMO UNA FILA CHE CONTIENE ESATTAMENTE DUE PIASTRELLE GRIGIE SULLA PARETE?

Gara di matematica a squadre femminile 2018
Soluzioni

Un enorme ringraziamento va a tutti coloro che quest'anno, con la solita, pura abnegazione, hanno contribuito a preparare i testi di gara:
Sandro Campigotto, Andrea Damonte, Mattia Fecit, Veronica Grieco, Alessandro Murchio, Simone Muselli, Maurizio Paolini, Lorenzo Pollani, Damiano Poletti, Francesco Raspaolo, Alberto Saracco, Edoardo Scarabelli, Silvia Sconza, Simone Traverso.
Tre organizzano molte altre gare importanti; gli altri sono ex-giocatori che sono ora iscritti a corsi di studi presso la Scuola di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali dell'Università di Genova.

Soluzione del problema 1. La scelta di tre lettere diverse da C, E e F, diverse tra loro può essere fatta in $18 \cdot 17 \cdot 16 = 4896$ modi diversi.
La risposta è 4896.

Soluzione del problema 2. L'esagono è sei volte il triangolo equilatero.
La risposta è 0088.

Soluzione del problema 3. Per la proprietà commutativa non ha importanza quanti sono i numeri -1 che seguono la parentesi chiusa, supponiamo che la parentesi chiusa sia esattamente prima del segno $=$. A questo punto ci sono due modi per inserire la parentesi aperta:

$$10000-1-1-1-1-\ldots-1-(1-\ldots-1) \qquad 10000-1-1-1-1-\ldots-1(-1-\ldots-1).$$

Nel primo caso il numeri di addendi è dispari; nel secondo caso, dopo aver applicato la proprietà distributiva, il numero di addendi è pari. In questo secondo caso il risultato sarà comunque un numero dispari. Perciò solo la prima parentesizzazione è corretta.
Ogni segno $-$ tra parentesi aumenta il risultato di 2. Devono comparire perciò 1009 segni $-$ in parentesi e 1010 numeri 1.
Altrimenti, il calcolo inteso doveva essere scritto nella forma $10000-k-(1-h)$ dove $k+h+1 = 10000$. Perché questo coincida con 2018 deve essere

$$2018 = 10000 - k - (1-h) = 9999 - k + h,$$

cioè $k+h = 9999$ e $k-h = 7981$. Così $k = \frac{9999+7981}{2} = 8990$ e $h = 1009$.
La risposta è 1010.

Soluzione del problema 4. Dopo 1 minuto Jolanda avrà spiegato la ricetta a 4 persone. Ci saranno perciò 5 persone che possono spiegarla, ciascuna a altre 4. Dopo n minuti la conosceranno 5^n. Dato che $5^4 = 625$ e $5^5 = 3125$, in 5 minuti tutti sapranno la ricetta.
La risposta è 0005.

Soluzione del problema 5. Dapprima $6837 = 3 \cdot 2279$, poi $2279 = 2304 - 25 = (48-5)(48+5) = 43 \cdot 53$. Quindi $3 + 43 + 53 = 99$.
La risposta è 0099.

Soluzione del problema 6. Servono un guanto destro e un guanto sinistro dello stesso colore. Si possono estrarre $35 + 28 + 49 = 112$ guanti tutti destri (o sinistri) di colori diversi, ma il successivo sarà sicuramente sinistro (risp. destro).
La risposta è `0113`.

Soluzione del problema 7. I primi due numeri 1 e 2 dicono il vero. Il numero 3 non dice il vero dato che $2 \nmid 3$, ma 2 ha detto il vero. Da qui in poi, perciò, solo le potenze di 2 dicono il vero. Per rispondere basta tenere conto che $\log_2(2018) \approx 10.98$.
La risposta è `0011`.

Soluzione del problema 8. Siano $b, c \in \mathbb{R}$ tali che $p(x) = bx + c$. Il problema equivale a risolvere il sistema:

$$\begin{cases} ab + c = 34 \\ 34b + c = 149 \\ 149b + c = 724 \end{cases}$$

La cui soluzione è $(a, b, c) = (11, 5, -21)$.
La risposta è `0011`.

Soluzione del problema 9. Per massimizzare la somma è chiaro che su una faccia deve comparire un numero di tre cifre abc su una faccia. Supponiamo che la somma delle sue cifre sia $a + b + c = de \geq 10$. A questo punto su un'altra faccia deve comparire la somma $d + e$. Dato che $27 \geq a + b + c \neq 19$, la somma $d + e \leq 9$ è di una sola cifra e la sua somma di un singolo addendo deve comparire su un'altra faccia. Restano due facce libere su cui si può inserire di nuovo il numero abc. La somma totale è

$$3 \cdot abc + a + b + c + 2(d + e) \leq 3 \cdot 999 + 27 + 2 \cdot 9 = 3042.$$

D'altro canto, supponiamo ora che la somma delle tre cifre del numero abc sia $a+b+c = d \leq 9$. Posizionando sulla faccia inferiore lo stesso numero d, restano tre facce su cui scrivere il numero abc. La somma totale è $4 \cdot abc + 2(a + b + c)$ e basta che $a = 8$ perché tale somma sia maggiore di 3024. Perciò, scegliendo abc in modo che sia massimo tra quelli con somma $a + b + c = 9$ si ottiene quanto desiderato.
La risposta è `3618`.

Soluzione del problema 10. La probabilità che Luca vinca con il primo lancio è $\frac{1}{6}$, che perda con il primo lancio è $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; la probabilità che Luca debba tirare di nuovo il dado dopo il primo lancio è $\frac{1}{2}$. Dato che la probabilità di tirare di nuovo il dado tende esponenzialmente a 0, la probabilità che Luca ha di vincere è $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.
Si può vedere anche come somma infinita delle probabilità di vincere dopo n lanci:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{3}.$$

La risposta è `0004`.

Soluzione del problema 11. Siano a i giorni impiegati per leggere la prima metà del primo libro, b i giorni impiegati per leggere la seconda metà del primo libro. Dunque $6a = 19b$; il numero di pagine del primo libro è un multiplo di $2 \cdot 6 \cdot 19 = 228$ e $a \geq 19$, $b \geq 6$. Così $a + b \geq 25$. Leggendo 6 pagine al giorno per 19 giorni del primo libro, e poi 19 pagine nei successivi 6, il secondo libro avrà almeno $19 \cdot 19 + 6 \cdot 6 - 3 = 394$ pagine.
La risposta è `0394`.

Soluzione del problema 12. Sia x il numero con cui entrambi iniziano a scrivere. Dopo n minuti Alessio scrive il numero $\frac{x}{2^n}$, Beatrice scrive il numero $x \cdot 3^n$. Si sa che

$$\frac{x \cdot 3^n}{\dfrac{x}{2^n}} > 2018.$$

Dunque $6^n > 2018$ e $n > \log_6(2018) \approx 4.2471$.
La risposta è `0005`.

Soluzione del problema 13. Osserviamo che ciascuna generazione successiva alla prima è geometricamente equivalente all'insieme di un quadrato di lato 10 cm ed un triangolo rettangolo di ipotenusa 10 cm, come mostrato in Figura. Quindi l'area complessiva occupata dalla costruzione è data da

$$10^2\,\mathrm{cm}^2 + 9\left(10^2 + \frac{10^2}{4}\right)\mathrm{cm}^2 = 10^2\left(1 + 9\left(1 + \frac{1}{4}\right)\right)\mathrm{cm}^2 = 1225\,\mathrm{cm}^2.$$

La risposta è `1225`.

Soluzione del problema 14. I numeri cercati sono della forma $abcd$ con $a > 0$. Perciò a è l'unico numero tra 1 e 9 tale che $a + b + c + d \equiv 0(\mathrm{mod} 9)$. Basta così determinare le triple (b, c, d) di cifre, almeno una nulla; di rovescio, le triple di cifre (b, c, d) di cifre diverse da 0 sono 9^3. Il valore cercato è $10^3 - 9^3 = 1000 - 729 = 271$.
La risposta è `0271`.

Soluzione del problema 15. Per poter minimizzare il numero di persone è necessario «far condividere» il più possibile: poichè non ci sono persone che possiedano tutti i mezzi, indichiamo con x il numero di persone che possiedono bicicletta e motorino, y quelle che hanno bicicletta e automobile e infine z quelle che dispongono di automobile e motorino. Poichè la soluzione del sistema

$$\begin{cases} x + y = 125 \\ y + z = 250 \\ x + z = 150 \end{cases}$$

è

$$\begin{cases} x = \frac{25}{2} \\ y = \frac{225}{2} \\ z = \frac{275}{2} \end{cases}$$

basta che una persona possieda solo un mezzo di trasporto, ad esempio la bicicletta (è indifferente la scelta di quale mezzo sia). Il sistema diventa

$$\begin{cases} x + y = 124 \\ y + z = 250 \\ x + z = 150 \end{cases}$$

la cui soluzione è $(x, y, z) = (12, 112, 138)$ e gli abitanti sono $12 + 112 + 138 + 1 + 32 = 295$.
La risposta è `0295`.

Soluzione del problema 16. I primi due pirati sono membri di ciurme differenti. Il terzo perciò dice il vero: è della ciurma di Barbarossa. Dunque la frase resta vera quando la pronunciano il quarto e il quinto pirata: dei primi cinque pirati, uno soltanto fa parte della ciurma di Barbanera. Così il sesto dichiara il falso mentre il settimo e l'ottavo dichiarano il vero, e via di questo passo. Per $n > 3$ l'n-esimo dichiara il falso e fa parte della ciurma di Barbanera se e solo se $3|n$. Dato che $3 \nmid 2017$ l'ultimo pirata dichiara quanti sono in

tutto i pirati di Barbanera: $[2017] = 672$. Dunque i pirati della ciurma di Barbarossa sono $2017 - 672 = 1345$.
La risposta è `1345`.

Soluzione del problema 17. Per il teorema di Talete, $\frac{OM}{PE} = \frac{BM}{BE}$; dato che $BE = FE \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$ ed $FE = PE$, allora $\frac{OM}{BM} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, da cui $AM = 2 \cdot OM$.
Il rapporto tra le parti richieste è 1.
La risposta è `0100`.

Soluzione del problema 18. Si indichi con 1 uno spostamento in senso orario, -1 uno spostamento in senso antiorario e 0 nessuno spostamento; ad ogni lancio la probabilità che un dato spostamento avvenga è $\dfrac{1}{3}$. Perché il segnalino sia nel vertice A dopo sei lanci, è necessario che sia avvenuta una sequenza di spostamenti la cui somma è congrua $0(\text{mod}4)$. Tali somme sono

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 \\
0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 1 & + & (-1) \\
0 & + & 0 & + & 1 & + & (-1) & + & 1 & + & (-1) \\
1 & + & (-1) & + & 1 & + & (-1) & + & 1 & + & (-1) \\
0 & + & 0 & + & 1 & + & 1 & + & 1 & + & 1 \\
1 & + & 1 & + & 1 & + & 1 & + & 1 & + & (-1) \\
0 & + & 0 & + & (-1) & + & (-1) & + & (-1) & + & (-1) \\
(-1) & + & (-1) & + & (-1) & + & (-1) & + & 1 & + & (-1)
\end{array}$$

Dato che gli addendi possono essere permutati tra loro, le possibili sequenze cercate sono la somma degli anagrammi delle somme elencate, cioè $1+30+90+20+15+6+15+6 = 183$.
La probabilità è $\dfrac{183}{3^6} = \dfrac{183}{729} = \dfrac{61}{243}$, perciò la soluzione è $61 + 243 = 304$.
La risposta è `0304`.

Soluzione del problema 19. Dato che tutte le cifre devono cambiare cambiare posizione (e comparire), bisogna arrivare almeno fino a dopo le ore 20:13 e percorrere almeno 15 km. Dunque conviene viaggiare, nelle sette ore e 37 minuti come minimo disponibili, in modo da ottenere una cifra superiore al 2 per le centinaia dei chilometri.
In sette ore e 37 minuti alla velocità di 50 km/h si percorrono

$$50 \cdot \left(7 + \frac{37}{60}\right) \text{ km} = \left(380 + \frac{5}{7}\right) \text{ km}.$$

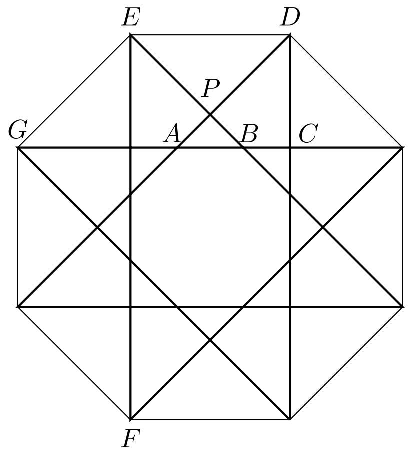
A quel punto il contachilometri segna 8365 km. Dato che la cifra 3 compare in due posizioni, conviene proseguire per almeno un minuto, ma bisogna fare almeno $\left(1 + \frac{2}{7}\right)$ km perché le ultime due cifre sul contachiloemtri siano diverse. Si percorrono $\frac{9}{7}$ km a 49 m/h alla velocità di 49 km/h in poco più di un minuto e mezzo. Alle ore $20:15$, il contachilometri segna 8367 km e il tachimetro segna 49 km/h. Sono passati 459 minuti, sono stati percorsi 382 km.
La risposta è `0841`.

Soluzione del problema 20. Si noti prima di tutto che deve essere $n > 1$. Sia a il numero di olive verdi. Si ha che

$$2 \cdot \frac{a}{n} \cdot \frac{n-a}{n-1} = \frac{1}{2},$$

cioè $4a^2 - 4na + n^2 - n = 0$. Dunque $a = \frac{n \pm \sqrt{n}}{2}$. Perciò deve esistere m tale che $n = m^2$ e $a = \frac{m^2 \pm m}{2}$. In totale ci sono 99 valori possibili di n.
La risposta è `0099`.

Soluzione del problema 21. I rettangoli massimi si ottengono tarcciando le diagonali da un vertice a quelli separati da altri due vertici:

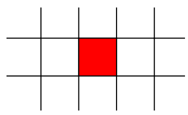


Sia $DE = 5\,\mathrm{cm} = \ell$. L'area del triangolo EPD è $\dfrac{\ell^2}{4}$ e $CD = \sqrt{\dfrac{\ell^2}{2}} = \dfrac{\ell\sqrt{2}}{2}$. L'area della superficie stellata è

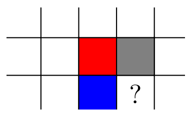
$$2\left(2\frac{\ell\sqrt{2}}{2}+\ell\right)\ell-\ell^2-4\frac{\ell^2}{4}=\left[2\left(2\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)-2\right]\ell^2=2\sqrt{2}\ell^2.$$

Il volume è $2\sqrt{2}\ell^3 \approx 353.55$.
La risposta è 0353.

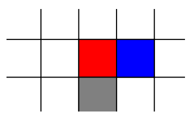
Soluzione del problema 22. Una casella deve essere colorata rosso altrimenti il grigio deve comparire una riga sì e una riga no, mentre il blu deve comparire una colonna sì e una colonna no. Si consideri dunque una casella generica colorata di rosso.



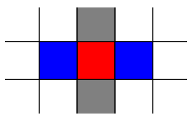
La casella sulla stessa riga a destra non può essere colorata di grigio perché la casella nella riga successiva sotto alla casella colorata di rosso dovrebbe essere colorata di blu



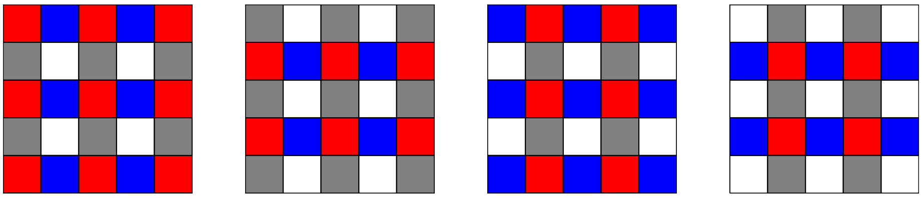
Ma a quel punto non si potrebbe colorare la casella con il punto di domanda: non rosso, non grigio perché la casella nella riga superiore dovrebbe non essere grigia, non blu perché la casella nella colonna che la precede lo impedisce. Perciò lo schema è il seguente:



Allo stesso modo la casella prima di quella colorata rosso deve essere colorata blu e quella sopra grigia. può essere colorata di grigio



Per le condizioni imposte, tutta la griglia viene ricoperta con il massimo numero di caselle "in croce" come nello schema appena individuato. Perciò si ottengono griglie necessariamente colorate in uno dei seguenti modi:



Le caselle vuote possono essere ciascuna riempita o di blu o di grigio.
In totale, i modi per riempire la griglia sono dunque

$$2^4 + 2 \cdot 2^6 + 2^9 = 656$$

La risposta è `0656`.

Soluzione del problema 23. Da un certo punto la successione prodotta dalle due regole sarà

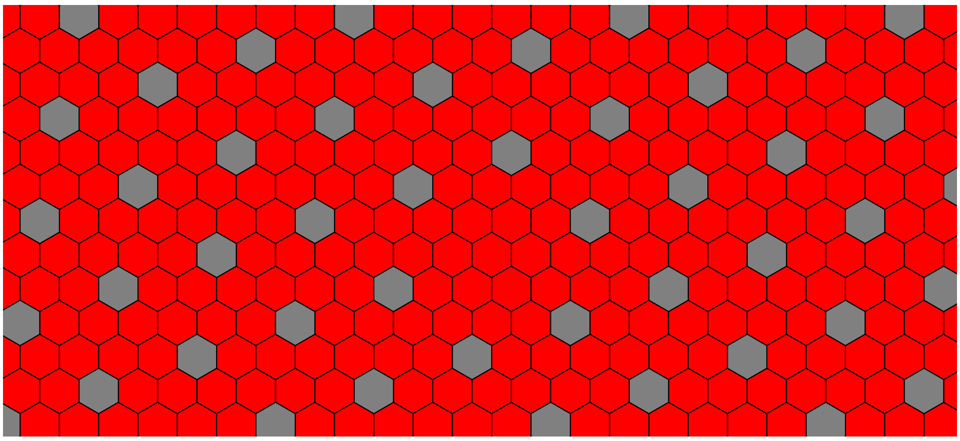
$$9 \quad 91 \quad 10 \quad 1 \quad 11 \quad 2 \quad 21 \quad 3 \quad 31 \quad 4 \quad 5 \quad 51 \quad 6 \quad 61 \quad 7 \quad 71 \quad 8 \quad 81 \quad 9\ldots$$

Dato che il primo numero è di due cifre il secondo o il terzo numero è minore di 10. Nella sequenza sopra la somma massima di otto addendi che inizia con un numero inferiore a 10 è $6+61+7+71+8+81+9+91 = 334$, quella con nove addendi è $6+61+7+71+8+81+9+91+10 = 344$. La somma massima dei dieci numeri si ottiene con la sequenza

$$96 \quad 15 \quad 6 \quad 61 \quad 7 \quad 71 \quad 8 \quad 81 \quad 9 \quad 91$$

ed è 445.
La risposta è `0096`.

Soluzione del problema 24. Le due condizioni impongono che i sei lati di un esagono grigio siano ciascuno in comune con un esagono rosso. Questi blocchi di sette esagoni permettono di costruire una tassellazione regolare del piano. In questa tassellazione ogni fila che congiunge due piastrelle grigie coinvolge da 6 piastrelle rosse. Nella piastrellatura con la piastrella grigia mancante la fila richiesta è lunga $4 \times 6 + 3 = 27$.



La risposta è `0027`.